RPM de nuestro motor

Resumen

En este artículo se harán unos cálculos para obtener el valor de las RPM de nuestros motores, o sea nuestras piernas, en el pedaleo según la velocidad a la que vayamos y las relaciones. Para ello es necesario conocer un poco de la física detrás de los engranajes y de las rotaciones de cuerpos rígidos. El cálculo es aplicable a cualquier bicicleta, tanto ruta como MTB.

Introducción

Para los cálculos, sólo es preciso conocer ciertos datos fácilmente medibles que son la velocidad a la que circulamos dado por algún velocímetro y la relación de transmisión que llevemos. Sin embargo es util conocer ciertas particularidades de un cuerpo en rotación.

Cuerpo rígido

Un cuerpo rígido es un objeto en el cual la distancia entre dos puntos siempre se mantiene constante, obviamente que tal objeto no existe en la realidad pero para es una excelente aproximación. En nuestro caso los cuerpos rígidos serán la rueda trasera, piñones y los platos. Por ejemplo, en el caso de un piñón, la distancia entre un diente y el centro será siempre la misma como así también la distancia de un diente al siguiente.

Velocidades en los cuerpos rígidos

Acostumbramos observar sólo la velocidad a la que circulamos, pero en la cinemática del cuerpo rígido también existe la velocidad angular puesto que estamos tratando con objetos en rotación, y está relacionada con el tiempo que tarda en completar una vuelta o un determinado ángulo, en símbolos será ω. En forma matemática, la velocidad angular se define como:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{1}$$

donde T es el tiempo que tarda en dar una vuelta completa o sea 2π o lo que es lo mismo 90°. Las unidades de ω son $1/s$. Otra expresión para la velocidad angular, y que es la que se usará aquí pues relaciona la frecuencia ν (con unidades iguales a las de ω) o RPM:

$$\omega = 2\pi\nu \tag{2}$$

La otra velocidad que se usará será la que habitualmente circulamos, que llamaremos velocidad tangencial, como si fuese una flecha (*vector* en términos formales) que sale tangente a la rueda y en el sentido de la rotación. La velocidad tangencial v_t se relaciona con la angular mediante:

$$v_t = \omega R \tag{3}$$

donde R es el radio del cuerpo en rotación (medido en metros, no kilometros ni milimetros), y las unidades serán km/h o m/s, en estos casos usaremos la velocidad en m/s puesto que el período T es demasiado corto como para expresarlo en horas. De igual manera para pasar de km/h a m/s simplemente hay que multiplicar la velocidad en tantos km/h por 0,277 y se transforma en m/s.

Engranajes

Como sabemos los engranajes de nuestras bicicletas tienen dientes que nos proporciona el fabricante o simplemente los contamos. Un valor de importancia es el denominado *relación de transmisión* que indicada cuán grande es el plato con respecto al piñón:

$$\text{Rel. de transmisión} = \frac{\text{Número de dientes del plato}}{\text{Número de dientes del piñón}} = \frac{Z_P}{Z_p}$$

esta relación también es la misma si hiciéramos el cociente entre diámetro del plato y el diámetro del piñón:

$$\text{Rel. de transmisión} = \frac{\text{Diámetro del plato}}{\text{Diámetro del piñón}} = \frac{D}{d}$$

esto es así puesto que la circunferencia se define:

$$c = 2\pi r = \pi d \tag{4}$$

y por otro lado también la circunferencia es en el caso de los engranajes relacionada por la cantidad de dientes Z y el paso p que es la distancia entre extremo y extremo de la semicircunferencia que forman los dientes:

$$c = pZ \tag{5}$$

entonces igualando (4) y (5) obtenemos:

$$pZ = 2\pi r \tag{6}$$

aplicando esto a los platos y piñones, con sus diámetros D y d, respectivamente:

$$c_P = \pi D = p_P Z_P$$

y

$$c_p = \pi d = p_p Z_p$$

y como se dijo antes la relación de transmisión es el cociente entre diámetros de plato y piñón o dientes de plato y dientes de piñón y que para abreviar la simbolizamos con la letra Ω, se puede reemplazar de las dos ecuaciones anteriores:

$$\Omega = \frac{D}{d} = \frac{\frac{\cancel{p_P} Z_P}{\cancel{\pi}}}{\frac{\cancel{p_p} Z_p}{\cancel{\pi}}}$$

por lo tanto:

$$\boxed{\Omega = \frac{D}{d} = \frac{Z_P}{Z_p}}$$

notar que se cancelaron los pasos p_P y p_p puesto que sino no habría forma de que engranen, por lo que tienen que ser iguales. De esta forma es más sencillo contar dientes que medir los diámetros y obtener la relación de transmisión.

Cinemática del cuerpo rígido

Tenemos ya suficiente información para relacionarlas entre sí y obtener las revoluciones de giro de nuestras piernas, ahora entra en juego la física de los cuerpos rígidos en rotación.

Si bien todo se encuentra girando, no todo tiene la misma velocidad tangencial ni angular. Quienes sí tienen la misma velocidad angular, serán la rueda trasera y los piñones ya que giran solidariamente pero no así sus velocidades tangenciales, puesto que viendo la ecuación (3) depende del radio y éste es distinto en la rueda y el piñón. El plato si bien también gira solidariamente puesto que está conectado a través de la cadena, éste tarda más en completar una vuelta entera que el piñón, por lo que también variará la velocidad tangencial. Resumiendo, tenemos tres velocidades tangenciales v_R, v_p y v_P (rueda, piñón y plato, respectivamente) y sólo dos angulares $\omega_R = \omega_p$ y ω_P, y se relacionan entre sí por la relación de transmisión.

Partimos del único dato de velocidad medible que tenemos que es la indicada en el velocímetro, o sea la velocidad tangencial v_R y además conocemos el radio de la rueda R, entonces es facil calcular la velocidad angular de la rueda y por ende del piñón (de todos los piñones) que denominamos ω_R:

$$\omega_R = \frac{v_R}{R} \tag{7}$$

lo que nos da una frecuencia utilizando (2):

$$\nu_R = \frac{\omega_R}{2\pi} = \frac{\frac{v_R}{R}}{2\pi} = \frac{v_R}{2\pi R} \tag{8}$$

Ahora bien, la velocidad tangencial del piñón debe ser igual a la velocidad tangencial del plato, puesto que si no lo fueran, alguno de estos dos componentes deslizaría sobre la cadena, no rodaría sin deslizar, sí o sí deben ser idénticas:

$$v_p = v_P$$

que utilizando en ambos lados de la igualdad la (3):

$$\omega_p r = \omega_P R$$

como los radios son iguales a la mitad de sus diámetros:

$$\omega_p d = \omega_P D$$

en términos de frecuencia, ecuación (2):

$$\nu_R d = \nu_P D$$

y $\frac{D}{d}$ es la relación de transmisión que en términos de dientes, queda la frecuencia del plato:

$$\boxed{\nu_P = \nu_R \frac{d}{D} = v_R \frac{1}{\pi D \Omega}} \tag{9}$$

se ve que todo quedó expresado en términos de datos conocidos, v_R velocidad de la rueda, πD (o $2\pi R$) circunferencia de la rueda y la relación de transmisión Ω.

Ejemplo

Si rodamos a 10 km/h que es lo mismo que decir 2,77 m/s, en una relación de transmisión $Z_P = 53$ y $Z_p = 11$ y rodando en una rueda de ruta 28" o 0,7112 m (habría que sumarle al diámetro lo que ocupa con cubierta), se obtiene:

$$\nu_P = \frac{2,77\cancel{m}/s}{\pi 0,7112\cancel{m}} \frac{11}{53} = 0,2573 \text{ 1/s}$$

expresado en RPM nos da $\nu_P = 15,43$ RPM, es decir que en un minuto en esta relación nuestras piernas giran poco más de 15 vueltas en un minuto, si cambiamos de relación, por ejemplo $Z_P = 42$ y $Z_p = 26$ y a la misma velocidad la cosa cambia a $\nu_P = 46,04$ RPM, lo que se ve en la ecuación general (9) es lo que nos sucede en la realidad, a una mayor relación de transmisión y poca velocidad damos pocas vueltasy cuesta mantenere el equilibrio, y menor relación y misma velocidad más vueltas.

Espero sirva el fundamento teórico, en breve voy a colgar una tabla una base de datos para poder calcular directamente las vueltas para cada relación de transmisión y diferentes velocidades.